9-10-19

Recap: Min Cost Flow Problem

$G(V, E)$ (directed), $\forall e = (i,j)$: - $c(i,j)$: capacity
- $w(i,j)$: cost,

$\forall i \in V$, $b(i)$: budget s.t.

$b(i) \begin{cases} > 0 & \rightarrow \text{'i' is supply node} \\ < 0 & \rightarrow \text{'i' is demand node} \\ = 0 & \rightarrow \text{neither sup. / nor dem.} \end{cases}$

Primal: $\min \sum_{(i,j)\in E} w_{ij} f_{ij}$ s.t. $0 \le f_{ij} \le c_{ij}$ &

$f_{out}(i) - f_{in}(i) = b(i)$ ie

z_i * $\sum_{j:(i,j)\in E} f_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} f_{ji} = b(i)$ } $\forall i \in V$

Dual:

[We dont need variable for $0 \le f_{ij}$ ∵ that contributes zero to the dual objective]

∵ we have primal minimization, so

$-f_{ij} \ge -c_{ij}$ * y_{ij} (dual var.)

max $\sum_{i\in V} z_i b_i - \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} y_{ij}$ st.

$y_{ij} \ge 0 \quad \forall (i,j) \in E$, z_i : unconstrained.

$-y_{ij} + z_i - z_j \le w_{ij} \quad \forall (i,j) \in E$

∴ $y_{ij} \ge -(w_{ij} - z_i + z_j)$ rewritten.

$\ge -[w'_{ij} = w_{ij} - z_i + z_j]$

If $w'_{ij} > 0$, $y_{ij} = 0$
If $w'_{ij} < 0$, $y_{ij} = -w'_{ij}$ } $y_{ij} = \max\{0, -w'_{ij}\}$

Modified dual:

max $\sum_i z_i b_i - \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} * \max\{0, -w'_{ij}\}$

without any constraints!

$\sum_{(i,j)\in E} w'_{ij} f_{ij} = \sum_{(i,j)\in E} (w_{ij} - z_i + z_j) f_{ij}$

$= \sum w_{ij} f_{ij} - \sum_{(i,j)} f_{ij} (z_i - z_j)$ Rewrite in terms of vertex

$= \sum w_{ij} f_{ij} - \sum_{i\in V} (f_{out} - f_{in}) z_i$

$= \sum w_{ij} f_{ij} - \sum_{i\in V} b(i) z_i$

Assume f_{ij} & z_i are optimal for primal & dual. Then,

$\sum_{(i,j)} w_{ij} f_{ij} = \sum_i b_i z_i - \sum_{(i,j)} c_{ij} \cdot \max\{0, -w'_{ij}\}$

$= \sum_{(i,j)} w_{ij} f_{ij} - \sum_{(i,j)} w'_{ij} f_{ij} -$

$\sum w'_{ij} f_{ij} = -\sum c_{ij} \max\{0, w'_{ij}\}$

$\sum c_{ij} \cdot \max\{0, w'_{ij}\} = \sum -w'_{ij} f_{ij}$

So, for a particular edge $(i,j) = e$,

$$c_{ij} \cdot \max\left\{\begin{matrix} 0, \\ w'_{ij}(-1) \end{matrix}\right\} = -w'_{ij} f_{ij}$$

So, this is true for each edge.

$$\left.\begin{array}{l} \text{If } w'_{ij} > 0 \rightarrow f_{ij} = 0 \\ \text{If } w'_{ij} < 0 \rightarrow f_{ij} = c_{ij} \\ \text{If } w'_{ij} = 0 \rightarrow \text{can't conclude } f_{ij} \\ \text{But, if } 0 < f_{ij} < c_{ij} \rightarrow w'_{ij} = 0 \end{array}\right\} \text{C.S. conditions}$$